1. Métodos topológicos en análisis funcional y armónico

Los métodos topológicos constituyen uno de los fundamentos del Análisis. Frecuentemente estos métodos aparecen asociados a estructuras algebraicas equipadas con una topología. Estas estructuras son las que permiten dotar de simetría y abordar con mayor amplitud y generalidad algunos problemas concretos. Un claro ejemplo de esta situación es el Análisis Armónico: la estructura de grupo (topológico) permitió aunar diversas visiones y tener un punto de vista más claro al estudiar problemas no conmutativos.

Las líneas de investigación abordadas por el grupo de métodos topológicos en análisis funcional y armónico del IMAC se articulan alrededor de las estructuras algebraicas dotadas de una topología de las arriba mencionadas. Tales cuestiones son en general multidisciplinares y, como consecuencia, necesitan de herramientas desarrolladas en muy diversas áreas de la Matemática, y también (como necesariamente ocurre en la Matemática Fundamental) de problemas en los que desarrollar las técnicas. Las principales líneas desarrolladas por el grupo son las siguientes:

Línea de investigación 1: *Teoría de la dualidad: grupos localmente compactos.*

Uno de los logros fundamentales en el estudio de los grupos topológicos abelianos es la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen que introduce la estructura de grupo topológico localmente compacto en el grupo formado por las representaciones 1-dimensionales, los caracteres, y permite identificar todo grupo abeliano localmente compacto G con el grupo $\widehat{\widehat{G}}$ de los caracteres de su grupo de caracteres $\widehat{G}$. Este resultado ha sido extendido a varias clases de grupos topológicos abelianos y ha encontrado aplicación en otras partes de las Matemáticas, como la Teoría de Números, y el Análisis Armónico. Muy recientemente se han encontrado nuevas e interesantes aplicaciones a la teoría de los códigos convolucionales.

Al contrario de lo que ocurre con los grupos abelianos, la dualidad de los grupos no conmutativos presenta importantes dificultades adicionales. Hay muchas cuestiones abiertas importantes que están relacionadas con el estudio de las representaciones unitarias. Hablando en términos generales, se trata de averiguar hasta qué punto las representaciones de un grupo topológico determinan la estructura algebraica y topológica del mismo.

En general es necesario a utilizar representaciones en grupos de matrices unitarias (para el caso de los grupos compactos) o en espacios de operadores de dimensión infinita (para los grupos de Lie no compactos y grupos localmente compactos en general). La teoría se divide aquí en varias direcciones dependiendo del punto de vista adoptado para definir y estudiar el objeto dual a un grupo topológico. Podemos citar como ejemplo, la dualidad de Tannaka-Kreĭn que está ampliamente aceptada para los grupos compactos. Otras aproximaciones problema se basan en la teoría introducida por Chu que extiende y unifica la de Pontryagin-van Kampen y la de Tannaka-Kreĭn o las que utilizan los espacios de operadores (notablemente la C^*-algebra de grupo).

Las técnicas topológicas son a menudo relevantes en esta línea de investigación, en la que confluyen necesariamente con las teorías de operadores de representaciones.

Algunos de los problemas relacionados con esta línea abordados desde nuestro grupo son:

1. Clasificación de los grupos pro-localmente compactos abelianos que satisfacen la dualidad de Pontryagin-van Kampen (prouesto por Hofmann y Morris).

2. Profundizar en las aplicaciones de la teoría de la dualidad a la de los códigos convolucionales.

3. Investigar la teoría de la dualidad de los grupos localmente compactos no abelianos.

4. Investigar la topología de Bohr de los grupos localmente compactos no abelianos.

Línea de investigación 2: *Teoría de la dualidad: grupos profinitos.*

Resultados de reciente aparición relacionan la teoría de la dualidad con la de los grupos profinitos. De este modo cabe esperar que los resultados obtenidos en teoría de la dualidad tengan aplicación en el estudio de algunos problemas fundamentales de la teoría de los grupos profinitos. Esta es todavía una línea de investigación poco explorada pero que podría permitir abordar problemas como la conocida Conjetura de Serre que esencialmente pregunta si todo grupo profinito finitamente generado tiene una única topología de grupo profinita.

En esta línea de investigación nos proponemos un acercamiento unificado a las dos teorías con el objetivo de investigar conjuntamente los problemas abiertos de las dos, utilizando indistintamente tanto las herramientas de la dualidad como la de los grupos profinitos, con el fin de profundizar en los avances obtenidos en los últimos treinta años por Hartley, Nikolavm, Segal, Ribes y Zaleskii, entre muchos otros.

Línea de investigación 3: *Conjuntos de interpolación y semigrupos envolventes.*

Toda representación de un grupo G en un espacio de Banach E_π determina un sistema dinámico cuyo semigrupo envolvente S_π (en el sentido de Ellis) puede caracterizarse como el espectro del álgebra conmutativa B_π generada por los coeficientes matriciales $F(\pi(\cdot)\xi)$, $\xi \in H_\pi$, $F \cdot E_\pi \to \mathbb{C}$ lineal y continua. Cuando las representación π es universal en algún sentido, aparecen álgebras muy conocidas como el álgebra de las funciones casi periódicas $AP(G)$, el álgebra de Fourier-Stieltjes $B(G)$ o el álgebra de las funciones débilmente casi periódicas $WAP(G)$. Los semigrupos S_π son también semigrupos compactos que dan lugar a importantes compactaciones (las compactaciones de Bohr, bG, de Eberlein eG o la compactación débilmente casi periódica wG).

La relación entre los semigrupos envolventes, los espacios de coeficientes y la teoría de representaciones, con la aportación de la Teoría de Grupos y la Teoría de Operadores ha sido fructífera al permitir abordar problemas en cada uno de estos ámbitos con técnicas desarrolladas en el resto de ellos.

Destacamos a modo de ejemplo algunos de los problemas en los que se manifiestan las relaciones anteriores:

Problema 1: Dado un subconjunto A infinito de un grupo (discreto) Γ, ¿cuándo es posible encontrar un conjunto de Sidon infinito contenido en A? ¿contiene Γ necesariamente subconjuntos de Sidon infinitos?

Los conjuntos de Sidon surgen del encaje de Γ en su álgebra de Fourier-Stieltjes y entroncan con la Teoría de los conjuntos *lagunares*, conjuntos que por sus especiales características han encontrado multiples aplicaciones.

Problema 2: ¿Bajo qué condiciones puede un grupo topológico G sumergirse (topológicamente) en su semigrupos envolventes eG o wG?, ¿es cierto que todo grupo G que aparece como un subgrupo de eG, puede G sumergirse, como espacio uniforme, en el espacio de Hilbert ℓ_2?

Este problema puede replantearse en función de cuándo la topología de G es generada por funciones de tipo positivo o por funciones débilmente casi periódicas, y tiene un nexo muy importante con las inmersiones crudas (*coarse embeddings* en inglés) en espacios de Hilbert cuya relación con la conjetura de Baum-Connes reducida ha sido sugerida por Gromov.

Línea de investigación 4: *Grupos unitarios, álgebras de grupo, K-teoría.*

Las álgebras de grupo introducen técnicas lineales en aquellos problemas en los que la estructura de grupo es relevante. El álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ de un grupo finito G, es el ejemplo más elemental. Pero en general todo grupo localmente compacto G tiene asociada un C^*-álgebra $C^*(G)$ que, entre otras cosas, codifica su teoría de representaciones.

Entre los invariantes que contienen información sobre una C^*-álgebra está su K-teoría. La K-teoría puede considerarse como una potente extensión de la Topología Algebraica que se ha mostrado de gran relevancia en la llamada *Geometría no Conmutativa.* Otro invariante relacionado es el grupo de unitarios $\mathcal{U}(A)$ de la C^*-álgebra A, que es un grupo topológico metrizable aunque no localmente compacto.

Un problema básico en esta línea es el de determinar hasta qué punto queda determinado un grupo G por las álgebras de grupo $L^1(G)$ y $C^*(G)$ y los grupos $K_1(C^*(G))$ o $\mathcal{U}(C^*(G))$.

Línea de investigación 5: *Operadores definidos entre espacios de funciones continuas.*

La representación de los homomorfismos definidos entre espacios de funciones continuas ha sido a menudo considerada para diferente tipos de dominios y codominios. Después de los resultados clásicos de Banach–Stone, Gelfand–Kolmogorov, Hewitt, Kaplansky, etc., se sabe que uno de las herramientas más útiles para estudiar los homomorfismos definidos entre espacios de funciones es la noción de *Aplicación Separadora.* Este concepto ha permitido unificar resultados aparentemente dispares, permitiendo clarificar hasta qué punto pueden extenderse los resultados clásicos de la teoría y, al mismo tiempo, dando un marco adecuado para investigar nuevos tipos de problemas. Desde el grupo de métodos topológicos en análisis funcional y armónico el interés en este campo se ha centrado en los últimos tiempos en la representación de homomorfismos definidos entre grupos de funciones continuas. Se trata de determinar qué tipo de homomorfismos definidos entre grupos de la forma $C(X,G)$ y $C(Y,G)$, siendo X e Y espacios topológicos y G un grupo topológico (normalmente de Lie) se representan a través de homomorfismos entre los espacios X e Y. Hay numerosos antecedentes en esta línea de investigación pero las cuestiones principales no han sido resueltas en el marco de los grupos de funciones continuas.

Línea de investigación 6: *Sistemas dinámicos discretos y teoría de ultrafiltros.*

La teoría de ultrafiltros tiene conexiones con una gran variedad de ramas de la Matemática que van desde la teoría de Ramsey, pasando por construcciones básicas en Topología General, hasta llegar a la teoría de Modelos en el ámbito de la teoría de Conjuntos.

El nexo de unión entre la teoría de ultrafiltros y los sitemas dinámicos nace a partir de los distintos tipos de recurrencia. En realidad, la teoría de ultrafiltros está intimamente relacionada con las técnicas combinatorias y con la estructura topológico-algebraica natural de semigrupo de la compactación de Stone-Cech de los números naturales dotados de la topología discreta. La relación entre la teoría de ultrafiltros y los distintos tipos de recurrencia que aparecen en un sistema dinámico discreto nace de un hecho sencillo: si un punto x de un espacio topológico X es un punto de acumulación de una órbita del sistema dinámico (X, f), la familia de los $N(V)$, donde $N(V)$ es el conjunto de los naturales n para los que elemento n-ésimo de la órbita pertenece al entorno V de x, forman un filtro contenido en algún ultrafiltro p de números naturales, lo que suele indicarse como que x es un p-límite de la órbita. En otras palabras, los elementos de la compactación de Stone-Cech de los números naturales describen todas las posibles formas que tiene una órbita (en general, una sucesión) de aproximarse a un punto del espacio de fases. Este enfoque ya aparece en tabajos de Fustenberg. Además, los conceptos de punto recurrente, uniformemente recurrente o de puntos proximales pueden formularse de una forma muy elegante en términos de iteraciones de ultrafiltros como probó Blass en 1993.

Blass pone de manifiesto que la familias de ultrafiltros utilizados para caracterizar los distintos tipos de recuerrencia que hemos comentado son disjuntas de la familia de los P-puntos y de la familia de ultrafiltros selectivos, de gran importancia en la teoría de Ramsey. Este hecho plantea de forma natural los dos problemas siguientes:

– Caracterizar las órbitas de un sistema dinámico discreto que tienen como p-límite P-puntos.

– Caracterizar las órbitas de un sistema dinámico discreto que tienen como p-límite ultrafiltros selectivos.