2. Sistemas Dinámicos

La teoría de los Sistemas Dinámicos, tanto en su vertiente geométrica como en la analítica y en la numérica, ha sido y es objeto de una gran atención por parte tanto de matemáticos como de físicos desde los comienzos del siglo pasado, en que empezó su desarrollo merced a los trabajos pioneros de Poincaré, aunque sin duda las aportaciones de Kolmogorov, Arnold, Moser, Smale y Nekhorosev (por citar unos cuantos nombres) han sido definitivas para que la teoría haya adquirido el grado de madurez con el que cuenta actualmente.

En los últimos años su importancia ha crecido todavía más, por cuanto se ha mostrado su necesidad para el estudio de problemas globales en la teoría de ecuaciones diferenciales, y en particular en aquéllas que provienen de un formalismo lagrangiano o hamiltoniano. Desde el punto de vista teórico, su uso ha permitido aclarar un gran número de cuestiones pendientes relativas a aspectos globales, estabilidad, integrabilidad, búsqueda de constantes del movimiento, bifurcaciones en sistemas dependientes de parámetros, etc. En ese sentido, las herramientas proporcionadas por otras partes de la Matemática, como la topología, la teoría de nudos, etc., han sido y son fundamentales.

Un tipo particular de sistema dinámico con el cual se ha venido trabajando últimamente es el de los flujos Morse–Smale no singulares definidos en variedades tridimensionales. En variedades bidimensionales, los campos Morse–Smale forman un conjunto denso y son estructuralmente estables. En variedades tridimensionales los flujos Morse-Smale no son un conjunto denso, pero definen un abierto en el conjunto de campos vectoriales $\mathcal{C}^1$ definidos sobre la variedad. Además, se caracterizan porque tienen un número finito de órbitas periódicas, todas hiperbólicas, que pueden ser caracterizadas como nudos y la descomposición en asas redondas de la variedad permite conocer, en principio, las cadenas y el tipo de nudos que caracterizan a un determinado sistema.

En particular, los problemas estudiados por el grupo de Sistemas Dinámicos son:

1. Caracterización topológica del conjunto de órbitas periódicas de un sistema Morse-Smale no singular (NMS) sobre la variedad $S^2 \times S^1$.

2. Clasificación mediante nudos de las cadenas de los sistemas NMS sobre la variedad $S^2 \times S^1$.

3. Caracterización de las bifurcaciones genéricas de codimensión uno en sistemas NMS sobre $S^2 \times S^1$ mediante las operaciones obtenidas previamente.

4. Estudio de sistemas Hamiltonianos Bott integrables.

   Los sistemas Hamiltonianos Bott integrables están en la clausura de los sistemas NMS por lo que es interesante realizar un estudio similar al anterior considerando sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad que sean integrables Bott, es decir, aquellos sistemas Hamiltonianos que tengan una integral primera no degenerada. En éstos, $S^2 \times S^1$ aparece de forma natural al estudiar los espacios de fase de problemas modelizados mediante este tipo de sistemas Hamiltonianos. Por otra parte, estos sistemas pueden proporcionar mucha información para el estudio de los sistemas no integrables cercanos a ellos.

5. Aplicaciones: el problema de dos centros fijos.

   El problema de dos centros fijos es uno de los problemas donde se puede aplicar el estudio teórico realizado anteriormente para los sistemas Hamiltonianos, ya que las variedad que aparece es $S^2 \times S^1$. Este problema se puede utilizar en la modelización del movimiento de un satélite o como aproximación cuando se considera un planeta achatado, también resulta interesante como aproximación al problema de tres cuerpos cuando una de las masas es infinitesimal.

6. Grafos asociados a flujos Morse-Smale no singulares en variedades tridimensionales.