## 4. Análisis numérico y simulación

El Análisis en Matemáticas tiene dos vertientes fundamentales. El análisis abstracto o teórico se encarga de la búsqueda y fundamentación de los conceptos esenciales. El análisis aplicado pone atención preferente a los problemas específicos de la realidad física, en forma de ecuaciones diferenciales y de su tratamiento o estudio numérico y también problemas relacionados con aquéllas, como la aproximación de curvas y superficies, el control óptimo, etc.

Una manera efectiva de abordar el estudio de problemas del mundo real susceptibles de tratamiento matemático es la modelización. La construcción de gran parte de modelos matemáticos conduce a la formulación de problemas cuya expresión matemática es una ecuación o, más frecuentemente, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. El objetivo que se persigue es encontrar mecanismos que permitan "controlar el comportamiento del sistema", pero esto sólo es útil si el modelo representa de forma correcta el problema real buscando fiabilidad para los resultados.

La aparición de los ordenadores y su rápido desarrollo y accesibilidad han hecho posible calcular soluciones aproximadas muy precisas de los problemas matemáticos que surgen en las aplicaciones. La base teórica que sustenta todo esto es el Análisis Numérico. Esta disciplina desarrolla métodos y algoritmos implementables en los ordenadores y analiza su comportamiento, la fiabilidad de sus resultados y la forma computacional de estimarla. Nuevas posibilidades de cálculo originan nuevas ideas que conducen a algoritmos más eficientes. Por otra parte, la experimentación real, habitualmente muy costosa en ciertas áreas, está siendo sustituida por la simulación numérica, una experimentación virtual rápida y económica.

La investigación en este campo en la UJI abarca dos aspectos relativamente novedosos y a la vez relevantes: la integración geométrica de ecuaciones diferenciales y la modelización matemática de la sedimentación en la costa.

**Línea de investigación 1:** *Integración Geométrica.*

*Integración Geométrica* es el término que se suele usar para describir los métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales que preservan una o más propiedades físicas/matemáticas del sistema de forma exacta (hasta error de redondeo). Este área tiene su origen (a) en el convencimiento de la importancia de preservar las características cualitativas conocidas del problema continuo subyacente cuando la ecuación se discretiza y (b) en el hecho de que los métodos numéricos tradicionales no preservan esas propiedades cualitativas. Como resultado, durante el último decenio han aparecido nuevos esquemas numéricos que preservan las estructuras consideradas relevantes en un problema dado. La preservación de estas propiedades tiene importantes consecuencias de cara a la correcta simulación de sistemas físicos provenientes de áreas tan diversas como la mecánica celeste, los aceleradores de partículas, la dinámica molecular, la mecánica cuántica, la dinámica de fluidos, la dinámica del sólido rígido, etc.

Como valor añadido, resulta que el hecho de preservar las propiedades geométricas del sistema no sólo produce un comportamiento cualitativo mejorado de la aproximación, sino que también permite efectuar una integración a tiempos más largos que los métodos tradicionales, debido al favorable mecanismo existente en la propagación de errores. La base teórica para este superior comportamiento estriba en la idea del análisis regresivo del error. El área de la integración geométrica se ha desarrollado intensamente en los últimos años, habida cuenta de las favorables características de los nuevos métodos y sus potenciales aplicaciones en muy diversos campos.

La actividad del grupo de investigación en Integración Geométrica se centra fundamentalmente en los siguientes aspectos:

(a) El diseño y análisis de nuevas familias de integradores geométricos (generalmente de orden alto) para ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidos por composición de métodos básicos (de primer o segundo orden). Esto requiere el análisis teórico de la estructura de las condiciones de orden (para simplificar la solución de las mismas) y de los errores de discretizacion (para fijar los criterios de optimización de los parámetros libres que quedan al imponer las condiciones de orden a una determinada familia paramétrica de métodos de integración).

(b) Diseño de métodos de integración especialmente adaptados a ciertos tipos de problemas de evolución que poseen una estructura algebraica particular, como por ejemplo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo cuando el potencial también depende explícitamente del tiempo.

(c) Desarrollo de nuevas clases de métodos de integración de sistemas Hamiltonianos basados en funciones generatrices.

(d) Análisis de diversas técnicas de paso variable que preservan la estructura del problema en la integración geométrica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

(e) Aplicación de las técnicas de integración geométrica al tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales cuya solución es altamente oscilatoria. El propósito es construir nuevos algoritmos especialmente adaptados que sean capaces de proporcionar una descripción cualitativa correcta de una manera eficiente.

(f) Comparación realista de la eficiencia de los nuevos métodos de integración geométrica obtenidos con otros normalmente usados en problemas no triviales, así como tratamiento de sistemas complejos a tiempos largos.

**Línea de investigación 2:** *Modelización matemática de la sedimentación costera.*

La resolución numérica de sistemas hiperbólicos con término fuente es motivo de estudio por un gran número de autores debido a la infinidad de aplicaciones que se pueden encontrar en meteorología, ingeniería hidráulica, química o aereoespacial, etc. Un caso particular de estos sistemas son las ecuaciones de Saint-Venant, conocidas también en la literatura en lengua inglesa como *shallow water equations* o ecuaciones de aguas someras. Estas ecuaciones se emplean frecuentemente para simular el movimiento del agua en zonas costeras, lagos y estuarios. Una de las aplicaciones de las ecuaciones de Saint-Venant es el estudio de las corrientes en las zonas litorales, donde pueden aparecer dominios con fronteras poco regulares.

Las ecuaciones de Euler constituyen el modelo matemático fundamental para un estudio adecuado de este tipo de problemas, siendo las ecuaciones de aguas someras un caso particular de las mismas cuando se desprecian los efectos turbulentos y dispersivos. Constituyen un sistema hiperbólico no lineal y con término fuente.

Como es bien sabido, en la provincia de Castellón existe una cantidad considerable de playas que tienen una importancia fundamental para el desarrollo de la zona, debido a la atracción que tienen para el turismo. También es conocido que existe una problemática habitual en estas playas, referente a la pérdida de arena ocasionada por las corrientes. Para evitar este segundo problema, en muchas de estas playas se ubican pequeños espigones que permiten la acumulación de arena, consiguiendo de esta forma mejorar el atractivo de estas zonas. El objetivo de esta línea de trabajo consiste en desarrollar un modelo matemático que, basado en las ecuaciones citadas, permita simular el comportamiento de las corrientes en distintos puntos de la costa de Castellón. De esta manera será posible mejorar la ubicación de los de los espigones, con el fin de retener la arena de forma óptima.

Los esquemas más utilizados para la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras son los esquemas explícitos descentrados. Las dificultades que se plantean en esta situación están motivadas por las diferencias con las ecuaciones de Euler. Por una parte, las técnicas de descomposición de flujo están construidas a partir de una propiedad de homogeneidad del flujo que tienen las ecuaciones de Euler, pero de la que carecen las ecuaciones de aguas someras. Para solventar estas dificultades, así como que la discretización del término fuente no perjudique la propiedad conservativa del esquema, se utilizan técnicas específicas que realizan un tratamiento geométrico del término fuente, relacionándolo con la función de flujo. En la aplicación de estos modelos al estudio de las corrientes en zonas litorales, aparecen dominios con fronteras poco regulares. La necesidad de tratar correctamente las condiciones de contorno de deslizamiento o flujo nulo, que se imponen en la frontera tipo costa, aconseja utilizar esquemas de volúmenes finitos distintos a los habituales.